

# CIV6706A

---

## Régulation de la circulation – Coordination des feux – partie 3



**POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL**

LE GÉNIE  
EN PREMIÈRE CLASSE

École Polytechnique de Montréal

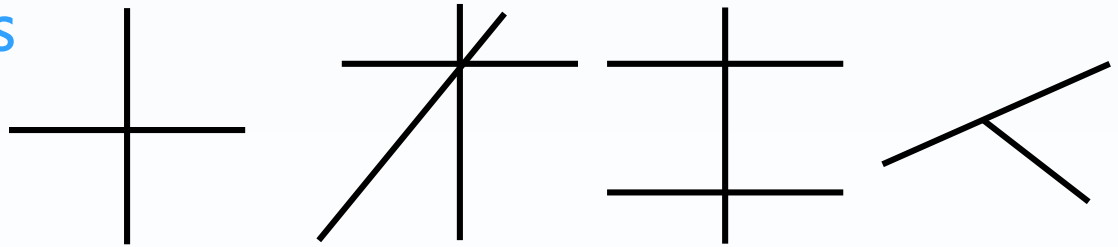
Département des génies civil, géologique et des mines

Automne 2017

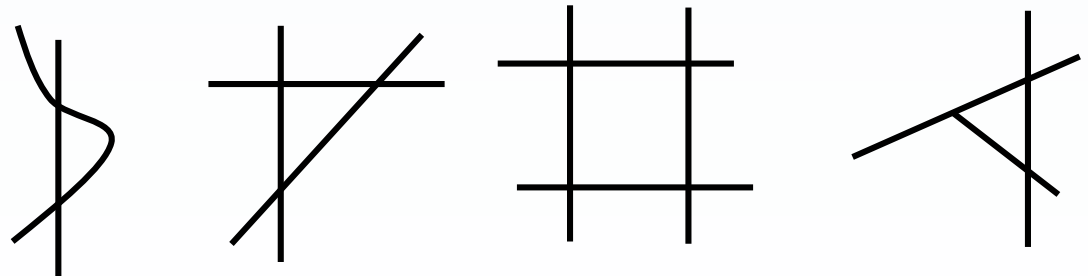
# RÉSEAUX MAILLÉS

Pour un regroupement de carrefours, on distingue deux types de réseaux :

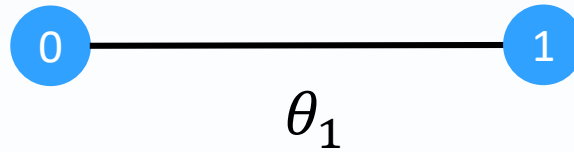
- Réseaux ouverts



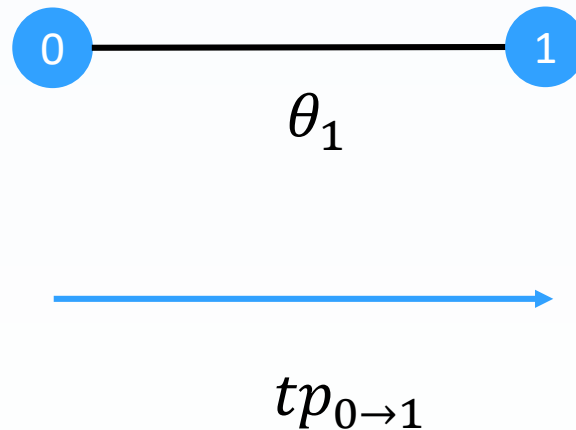
- Réseaux fermés



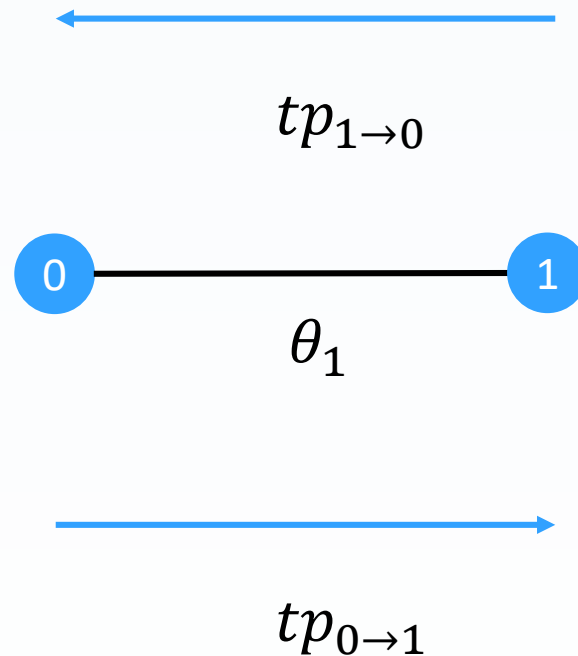
Dans le réseau simple suivant, nous avons  $m = 2$  carrefours et  $m - 1 = 1$  décalages.



Pour la coordination en une seule direction, on utilise le temps de parcours  $tp_i$  comme décalage.

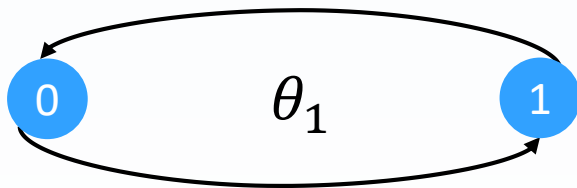


Pour une coordination en directions multiples, nous avons maintenant plusieurs temps de parcours. Lequel utiliser?

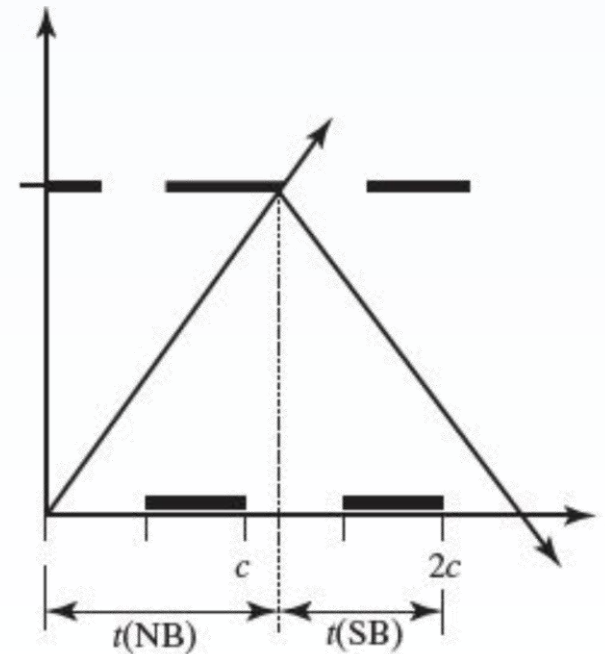


Pour une solution idéale, il ne suffit pas que les temps de parcours soient égaux ( $tp_{0 \rightarrow 1} = tp_{1 \rightarrow 0}$ ). La somme doit demeurer en phase avec l'horloge maître, c'est-à-dire,  $tp_{0 \rightarrow 1} + tp_{1 \rightarrow 0} = nC$  ou  $n$  est un nombre entier quelconque. C'est la **contrainte de circuit**.

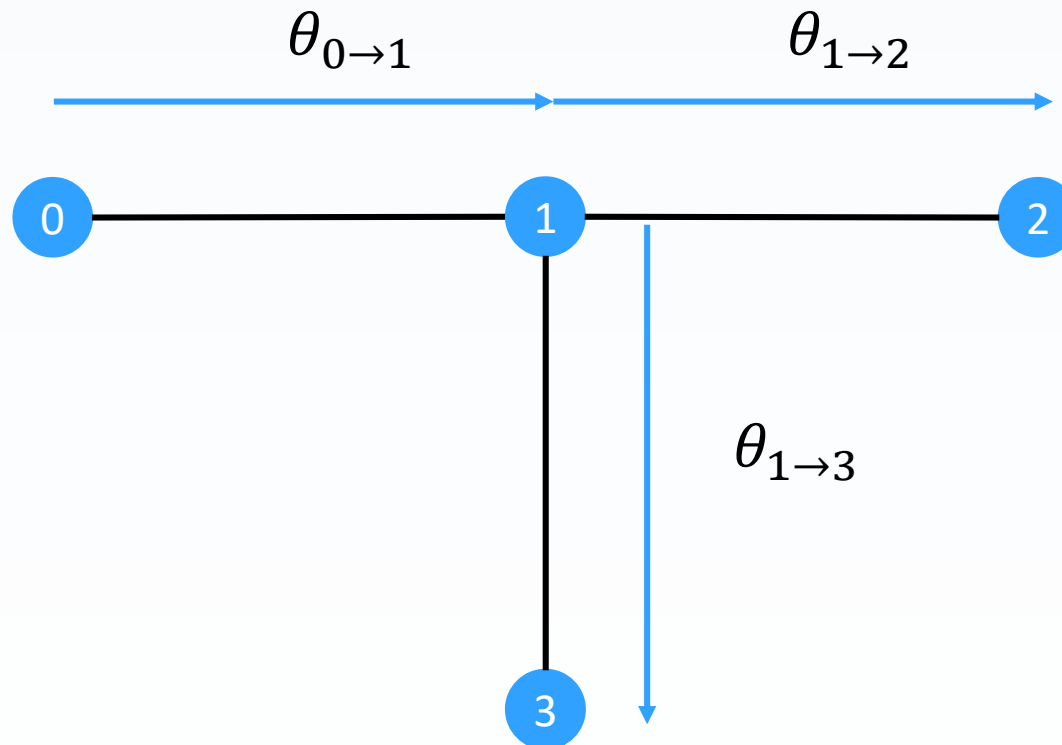
La coordination à sens multiple contient cette contrainte de circuit.



Les cas particuliers de la coordination simultanée et alterne correspondent à ces deux contraintes.

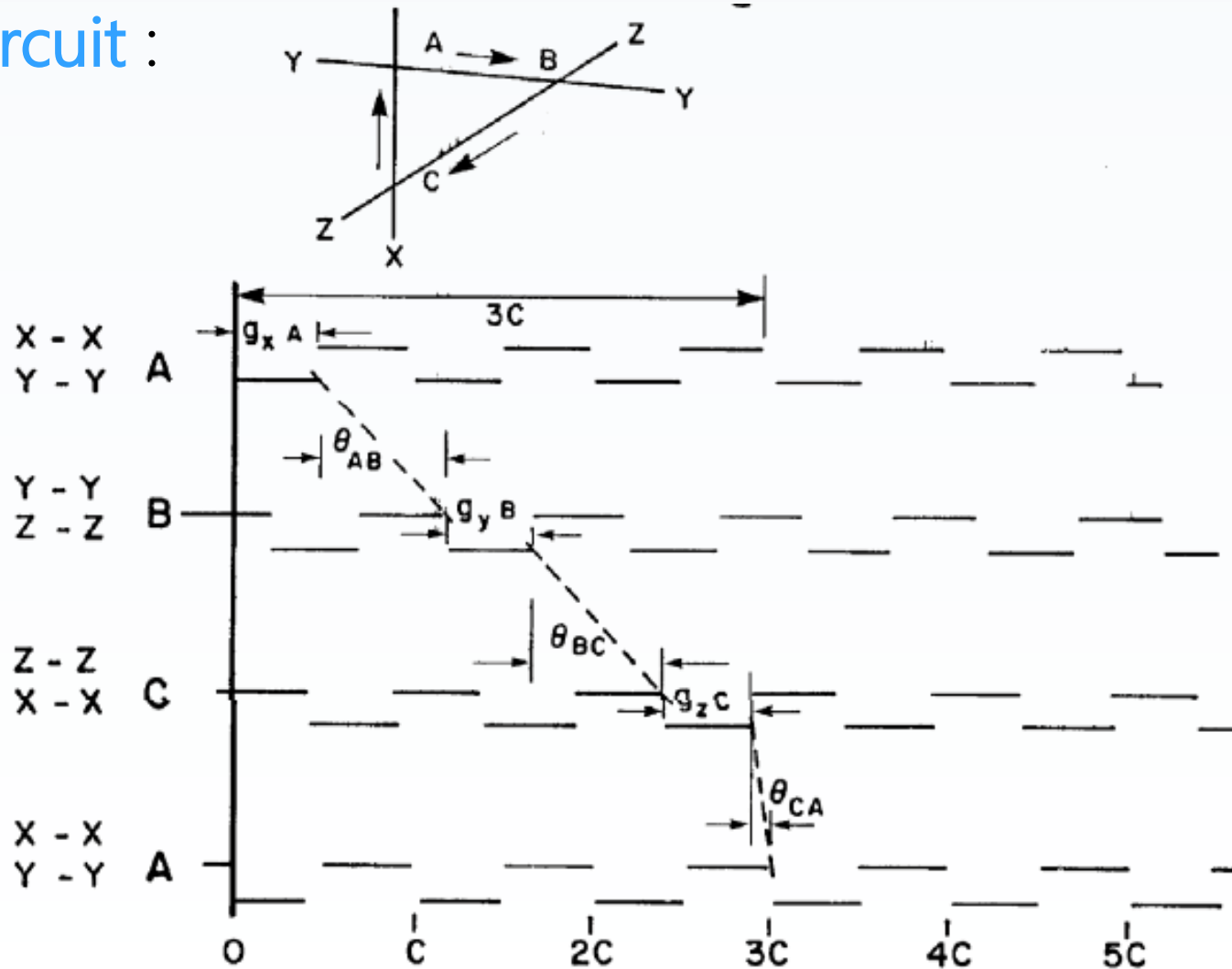


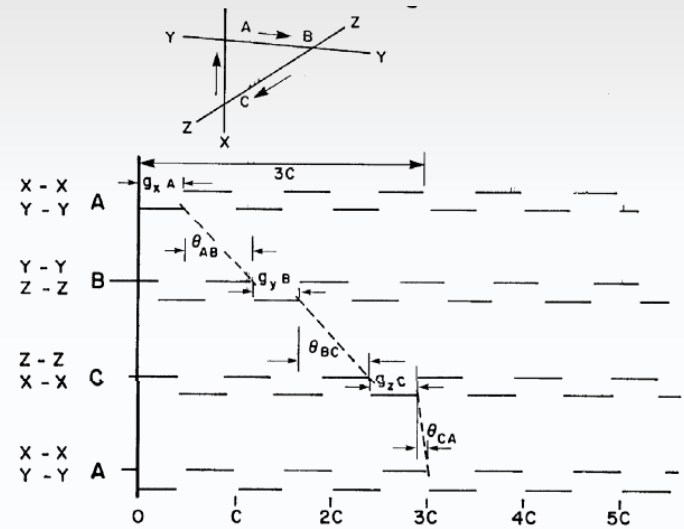
De plus, une divergence de direction doit aussi être décalée par un changement de phase!



$$\theta_{0 \rightarrow 3} = \theta_{0 \rightarrow 1} + \theta_{1 \rightarrow 3} + g_{0 \rightarrow 1}$$

Rappelons que les réseaux fermés comportent la contrainte additionnel d'avoir une série de carrefours en **circuit** :





On remarque alors que:

$$g_x + g_y + g_z + \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CA} = nC$$

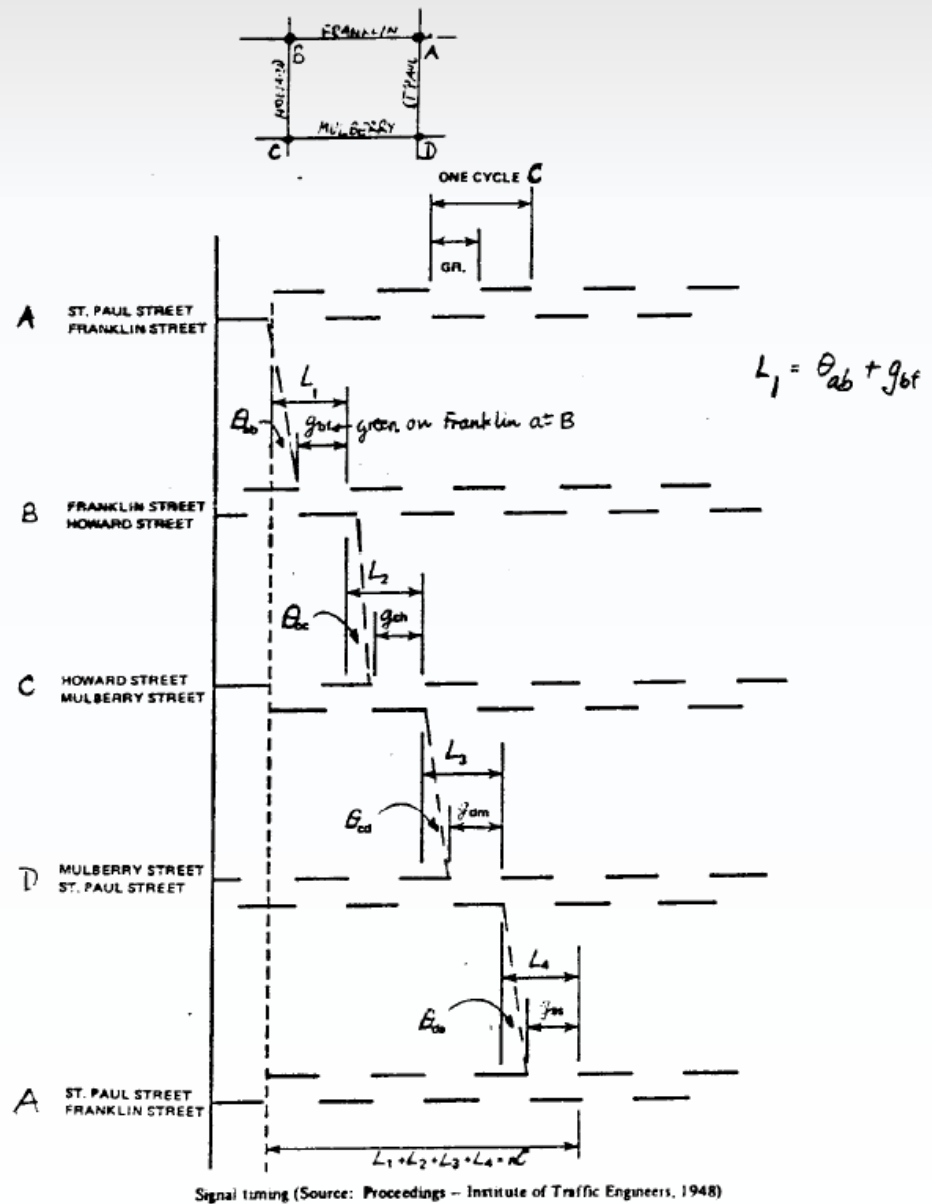
$\theta_{CA}$  ne peut être choisi librement.

L'exemple d'un circuit formé de quatre artères (mouvements droit) :

$$l_i = \theta_{i-1,i} + g_i$$

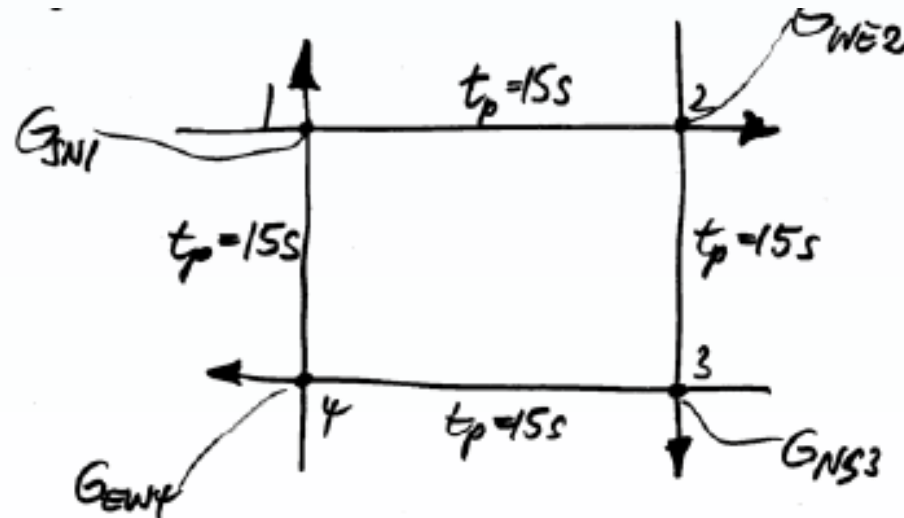
Pour les mouvements droit,  $g_i$  correspond au phase de coordination pour le mouvement  $\theta_{i,i-1}$

$$\sum l_i = nC$$

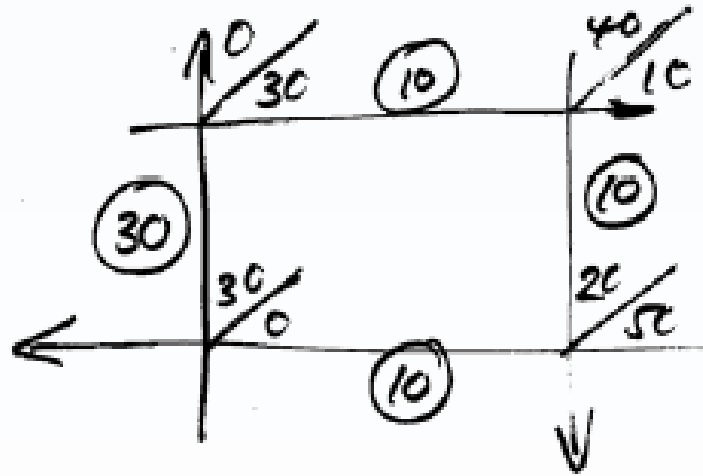


# EXEMPLE

- Système à sens unique
- Feux à 2 phases, répartition de vert 50/50
- Cycle de 60 sec

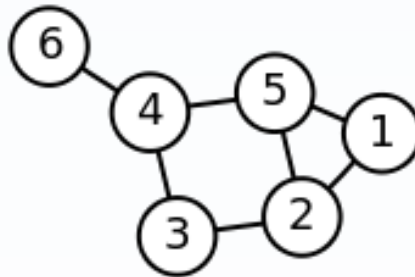


Mais, si  $t_{parc} = 10s$ , alors le dernier décalage  
 $\theta_{4,1} = 30s$



# THÉORIE DES GRAPHS

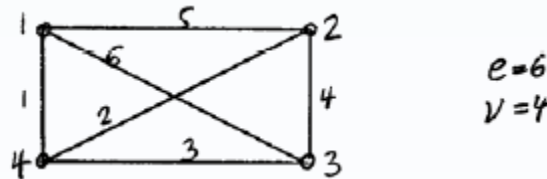
La théorie de graphes permet d'analyser systématiquement les réseaux complexes en les découpant en **arbre** et en **circuits**.



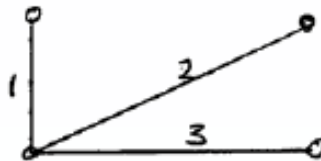
On distingue les **graphes orientés** (impositions des contraintes de direction) et **non orientés**. Pour l'analyse de la circulation, les graphes sont toujours orientés.

## Quelques définitions :

- **Nœuds (sommets, nodes),  $v$**  : Point d'extrémité des arcs dans le réseau.
- **Arcs (éléments, arêtes),  $e$**  : Les liens, ou segments de ligne liant deux nœuds.

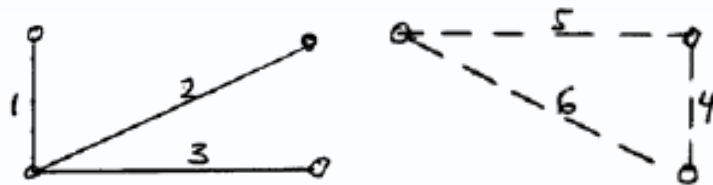


- **Incidence** : Se dit d'un nœud situé à l'extrémité d'un arc.
- **Arbre** : Sous-graphe qui contient tous les nœuds du graph et un minimum d'arcs de liaison, mais aucun circuit (réseau ouvert).

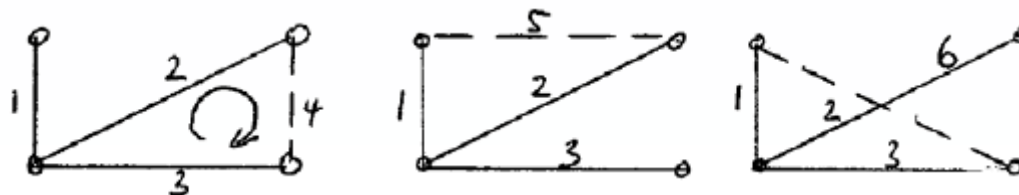


## Quelques définitions :

- **Branches,  $b$**  : Les arcs d'un l'arbre, chacun fourni un **degré de liberté**. Il y a  $b = v - 1$  branches.
- **Degré du nœud** : Le nombre de branches incidents à ce nœud.
- **Cordes,  $c$**  : Une corde est un arc du complément de l'arbre. Il y a  $c = e - v + 1$  cordes pour chaque arbre.



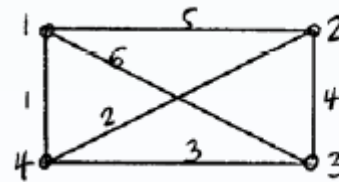
- **Circuit** : Fermeture de l'arbre en ajoutant une des cordes.
- **Circuits fondamentaux,  $c'$**  : Les  $c' = c$  circuits formés par les cordes forment les circuits fondamentaux.



## Quelques définitions :

- **Matrice d'incidence  $A$  (taille  $v \times e$ )** :  $a_{i,j} = 1$  si l'arc  $j$  est incident au nœud  $i$ ,  $a_{i,j} = 0$  sinon.  $a_{i,j} = -1$  si l'orientation diffère

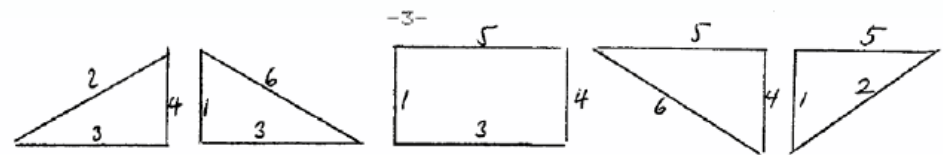
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$e=6 \\ v=4$$

- **Matrice d'incidence  $B$  (taille  $c \times e$ )** :  $b_{i,j} = +1$  si l'arc  $j$  fait partie du circuit  $c'$  et conserve l'orientation,  $b_{i,j} = -1$  si l'orientation n'est pas conservée et  $b_{i,j} = 0$  sinon.

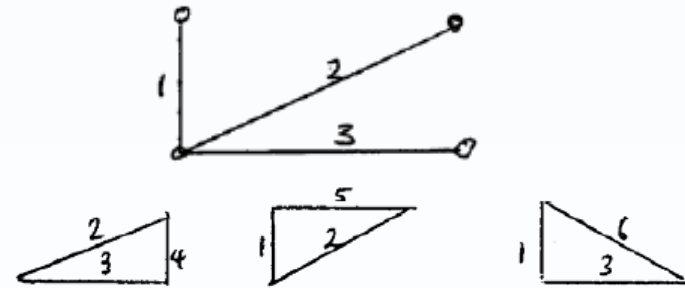
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Quelques définitions :

- **Matrice des circuits fondamentaux  $B_f$**  (taille  $c' \times (v - 1) * 2$ ) : contient deux matrices
  - une matrice identité (taille  $c' \times (v - 1)$ )
  - une matrice d'incidence limité aux circuits fondamentaux ( $c'$ ) et aux branches ( $v - 1$ ) de l'arbre principale

$$B_f = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

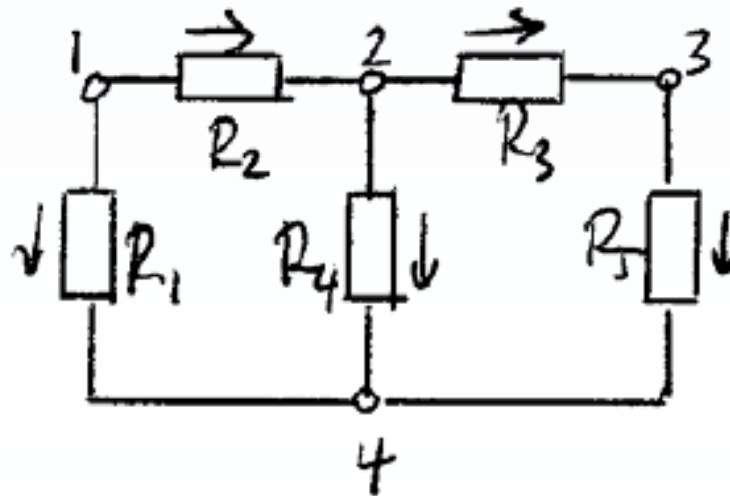


Dans l'application de la circulation, les graphes sont orientés.

# ANALOGIE CIRCUITS ELECTRIQUES

La loi de Kirchhoff est un exemple classique de l'application de la théorie de graphes.

- La somme des courants à chaque nœud doit être zéro
- La somme des tensions sur les circuits doit être zéro



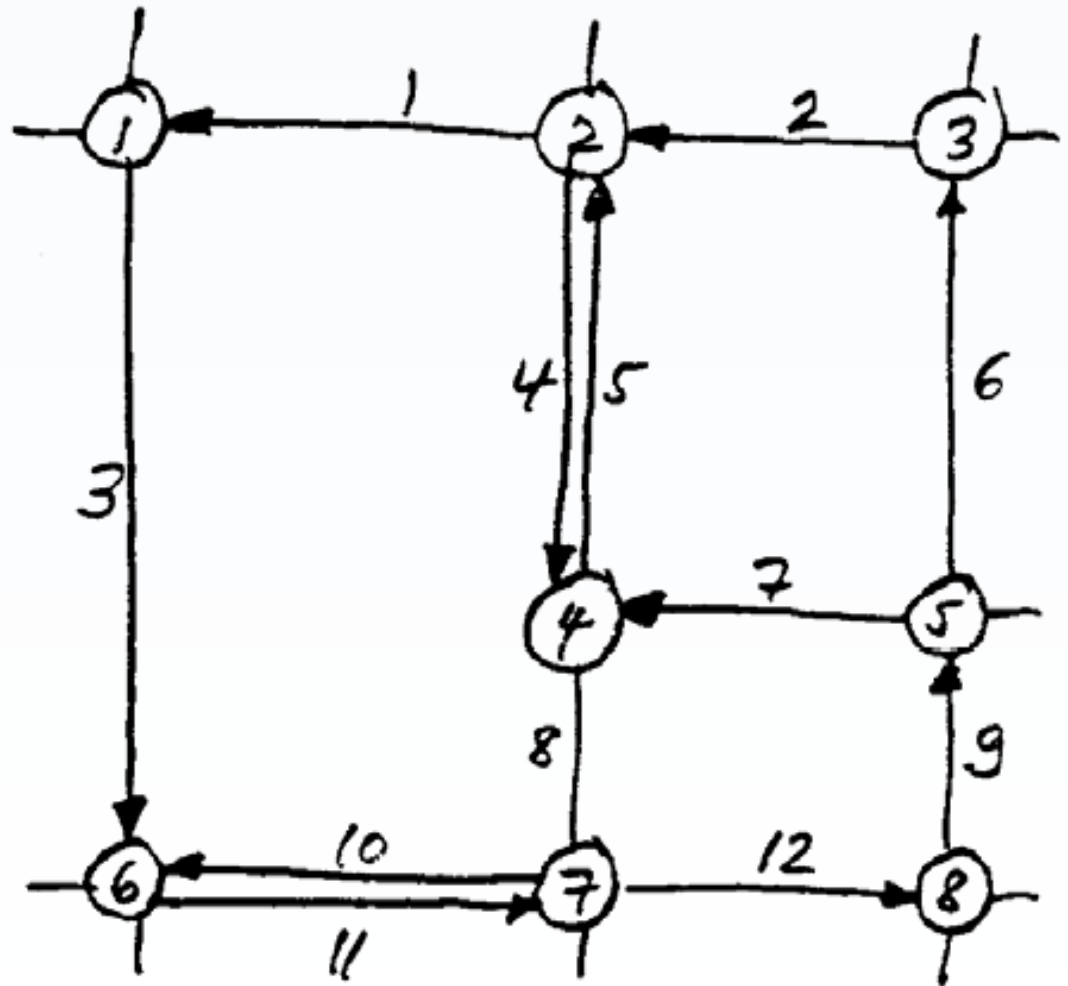
# EXEMPLE RÉSEAU ROUTIER

$$e = 12$$

$$v = 8$$

$$c = e - v + 1 = 5$$

$$c' = 9$$



On se rappelle :

$$\sum l_j = \sum g_{i,j-1} + \sum \theta_j = n_i C$$

On représente l'incidence avec une direction de coordination à un feu vert  $g_{i,j-1}$  par la multiplication de  $\theta_j$  avec  $b_{i,j}$  :

$$\sum b_{i,j} \theta_j + \sum g_{i-1} = n_i C$$

Notation :

$i$  = circuit

$j$  = arcs avec décalage

$c$  = circuits (un décalage par circuit)

$n_i$  = nombre entier quelconque

Nous avons alors les équations de contrainte de circuit pour les liens  $j = 1, 2, \dots, e$ , et l'espace de variable suivante (N.B. :  $g_e^*$  dénote le feu vert à une jonction de décalage, 0 autrement):

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_e \end{bmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{bmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ \vdots \\ g_e^* \end{bmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_c \end{bmatrix}$$

Notation matricielle des équations de contrainte :

$$\mathbf{B}\vec{\theta} + \vec{g} = \vec{n}\mathbf{C}$$

Nous avons cependant  $b = v - 1$  degrés de liberté et  $c = e - v + 1$  contraintes.

- Nous simplifions le system d'équations aux  $c'$  circuits fondamentaux et utilisons la matrice des circuits fondamentaux  $\mathbf{B}_f$  :

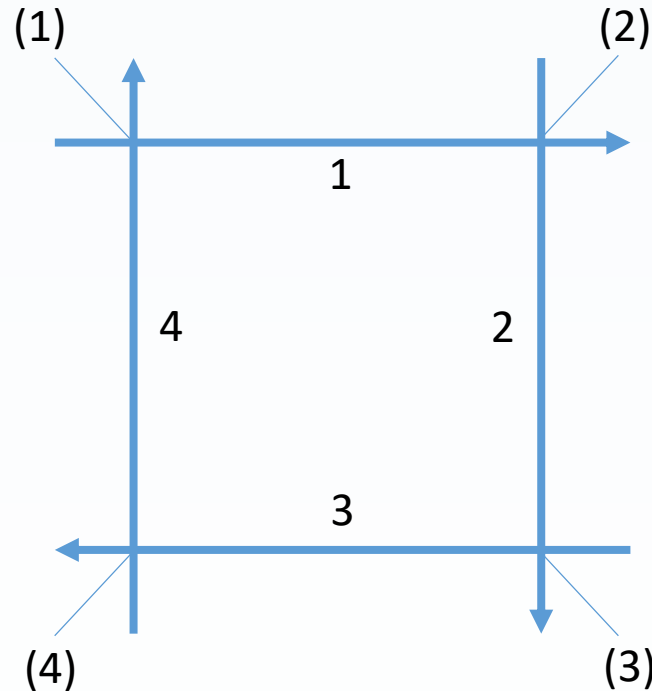
$$\mathbf{B}_f \vec{\theta} + \vec{g} = \vec{n}C$$

- Il faudra aussi réarranger le vecteur des décalages et des feux vert en fonctions des degrés de liberté :

$$\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \vec{\theta}_c \\ \vec{\theta}_b \end{bmatrix}, \vec{g} = \begin{bmatrix} \vec{g}_c^* \\ \vec{g}_b^* \end{bmatrix}$$

- Le choix de  $n_i$  n'a aucun impacte sur le décalage relatif entre carrefours.

# EXEMPLE NUMERIQUE SIMPLE

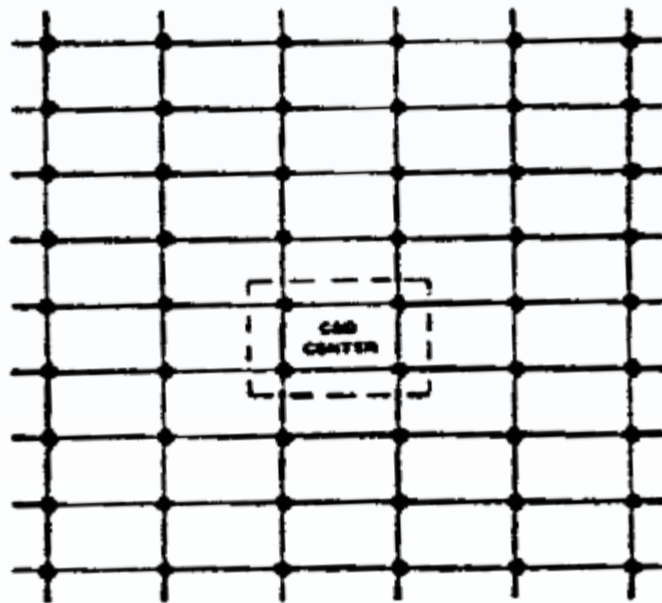


$$C = 50s$$

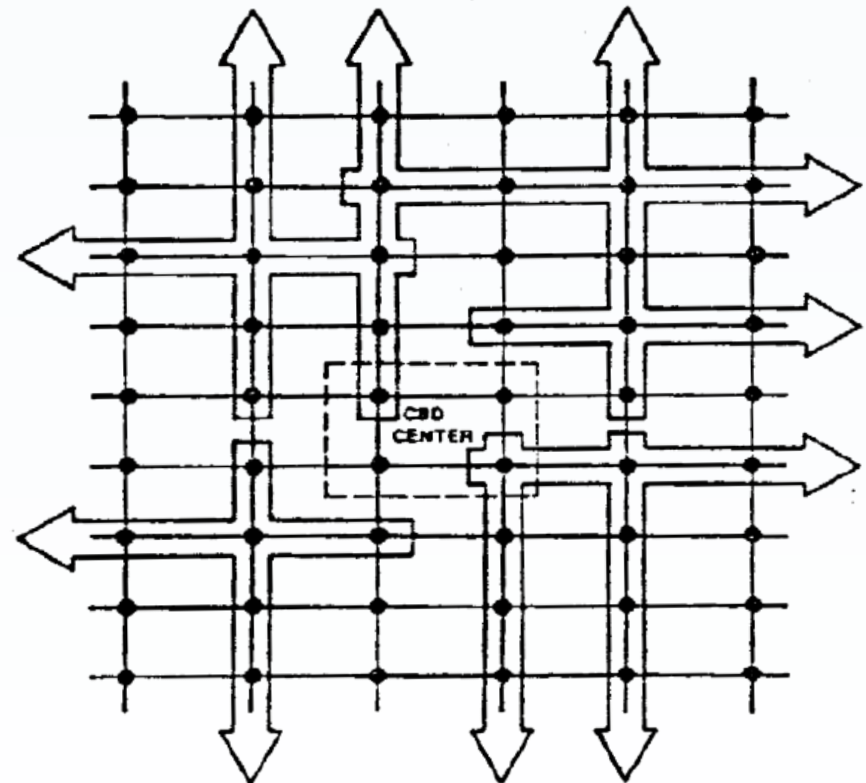
$$\frac{g}{C} = 50\%$$

$$tp_{1 \rightarrow 2} = tp_{2 \rightarrow 3} = tp_{3 \rightarrow 4} = tp_{4 \rightarrow 1} 10s$$

# IMPLÉMENTATION DANS UNE GRILLE

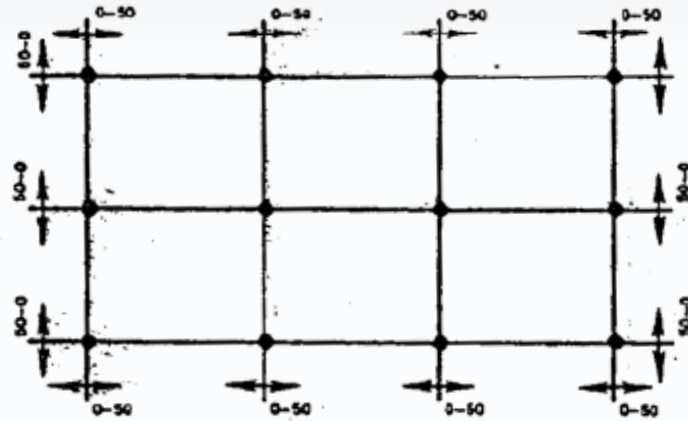


Central business district  
signal network



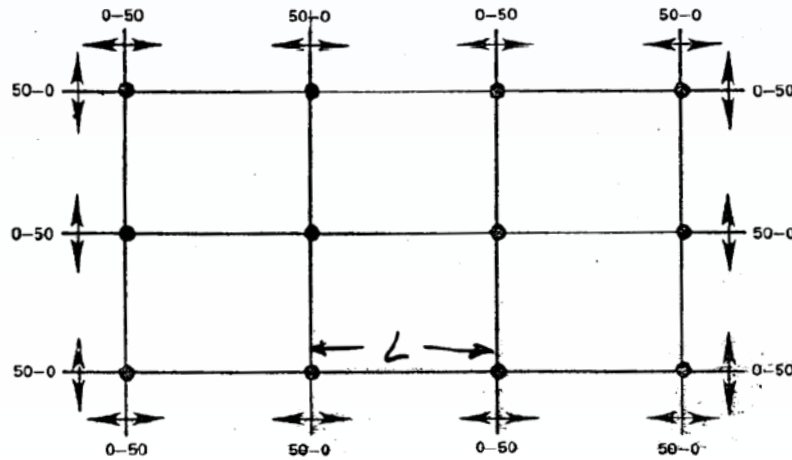
Preferential flow

# Coordination simultanée (par axe) :



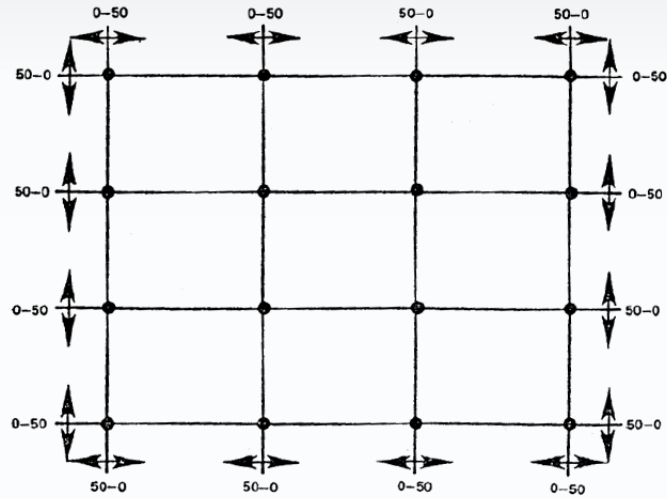
Simultaneous operation

# Coordination alterne :



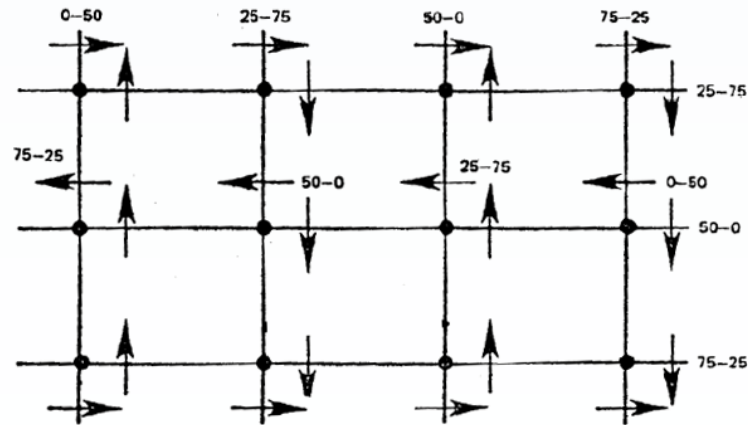
Single alternate timing

# Coordination des feux adjacents :



Double-alternate timing

# Coordination à décalages $C/4$ :



Quarter-cycle offset timing

# MINIMISATION DES RETARDS

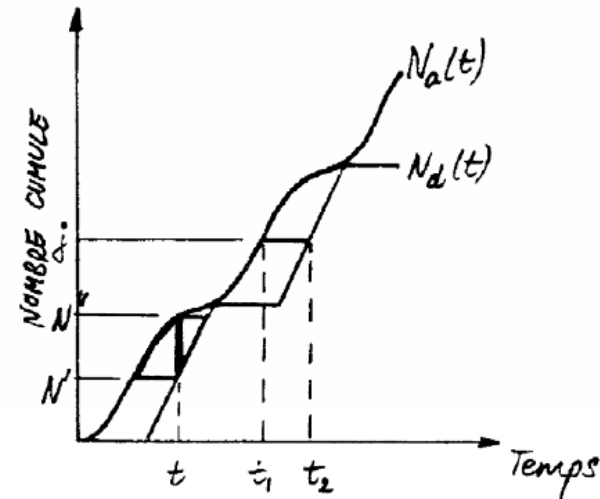
$N_a(t) = \int_0^t q(t)dt$ , la fonction d'arrivées (accumulation)

$N_d(t) = \int_0^t c(t)dt$ , la fonction de départs (cumulatif)

L'aire délimité par les deux fonctions représente le retard total (*veh · s*):

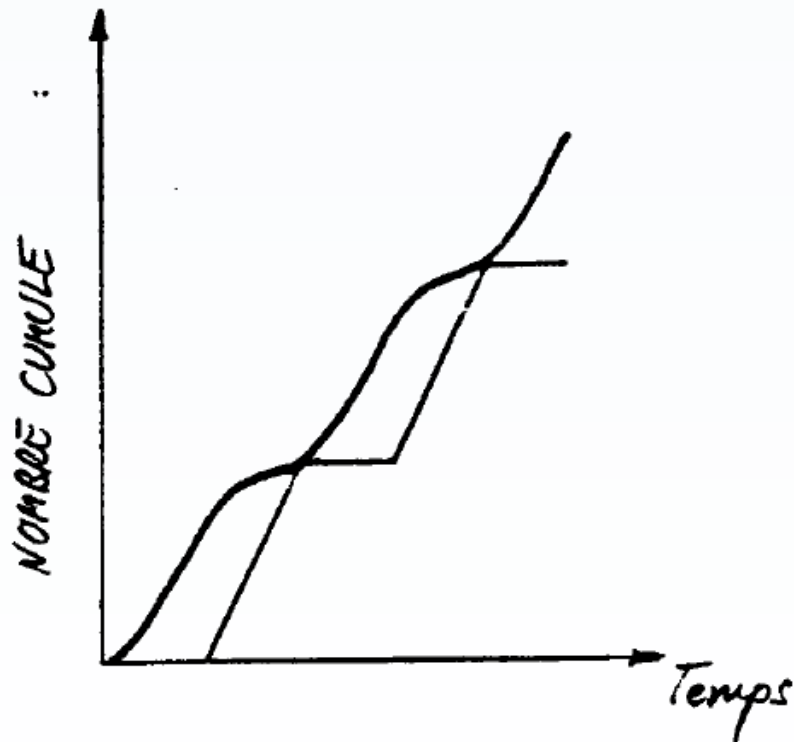
$$\int_0^t (N_a(t) - N_d(t))dt$$

- $t_2 - t_1$  : temps d'attente du véhicule  $j$
- $N'' - N'$  : le nombre de véhicules en queue au moment  $t$

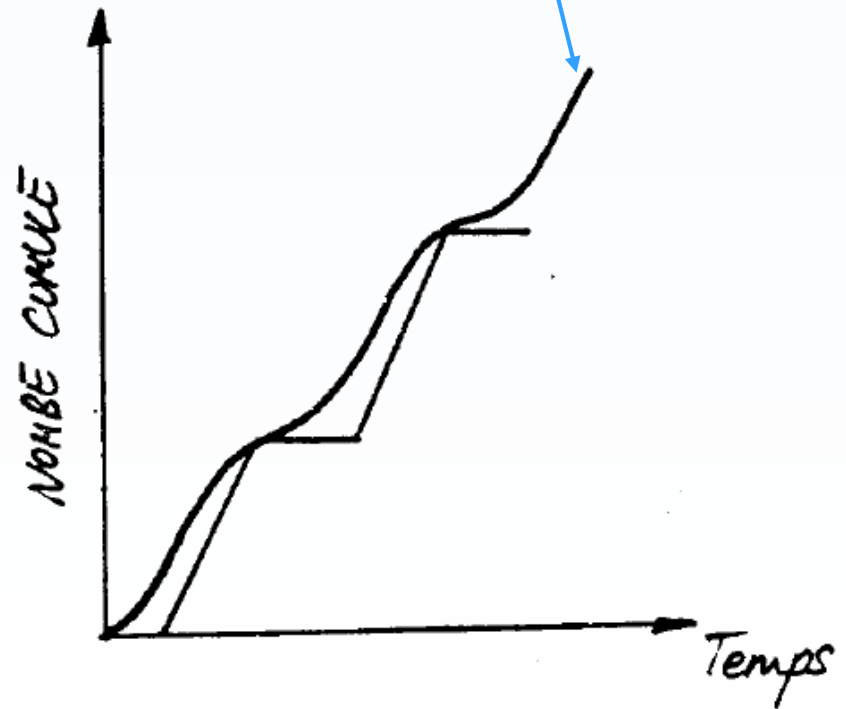


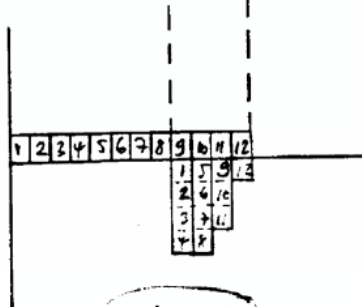
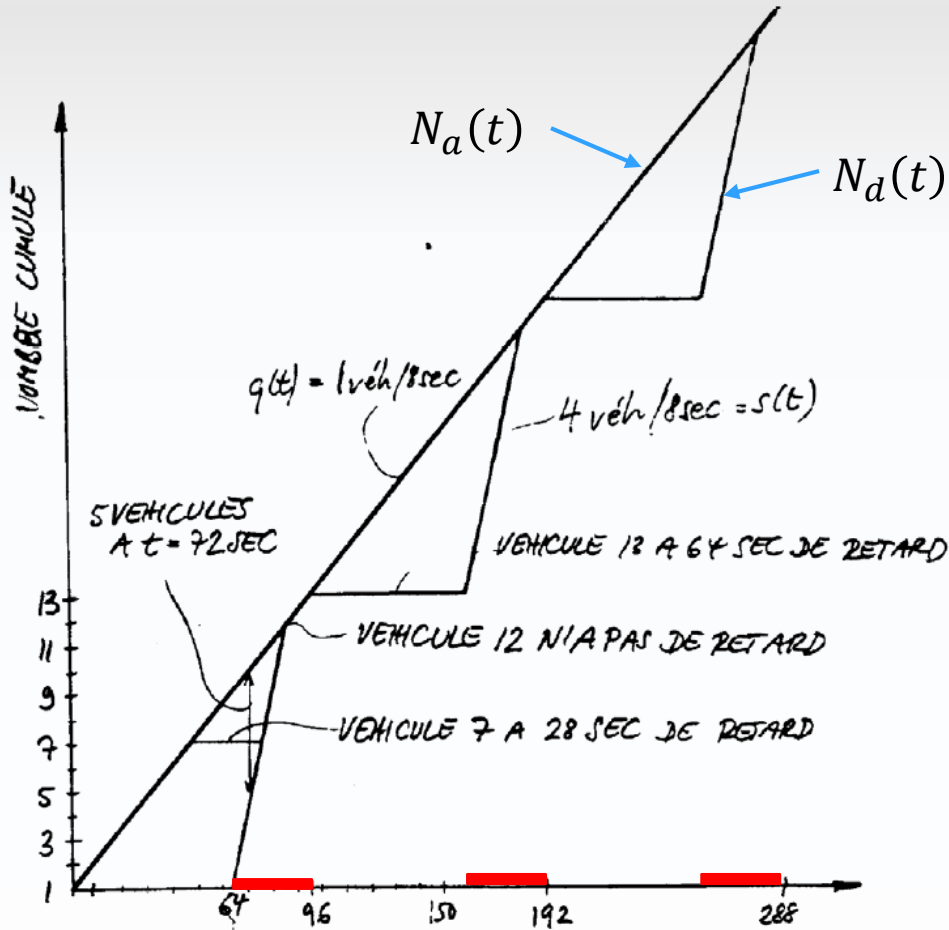
Le décalage  $\theta$  d'arrivé (la translation de  $N_a(t)$ ) a un impact profond sur les retards :

Maximisation des retards



Minimisation des retards





$\Sigma: 374$

LES RETARDS

Vehicule	Ret.
1	64
2	56+2
3	48+4
4	40+6
5	32+8
6	24+8+2
7	16+8+4
8	16+6
9	16
10	8+2
11	4
12	0

LA GILETUE

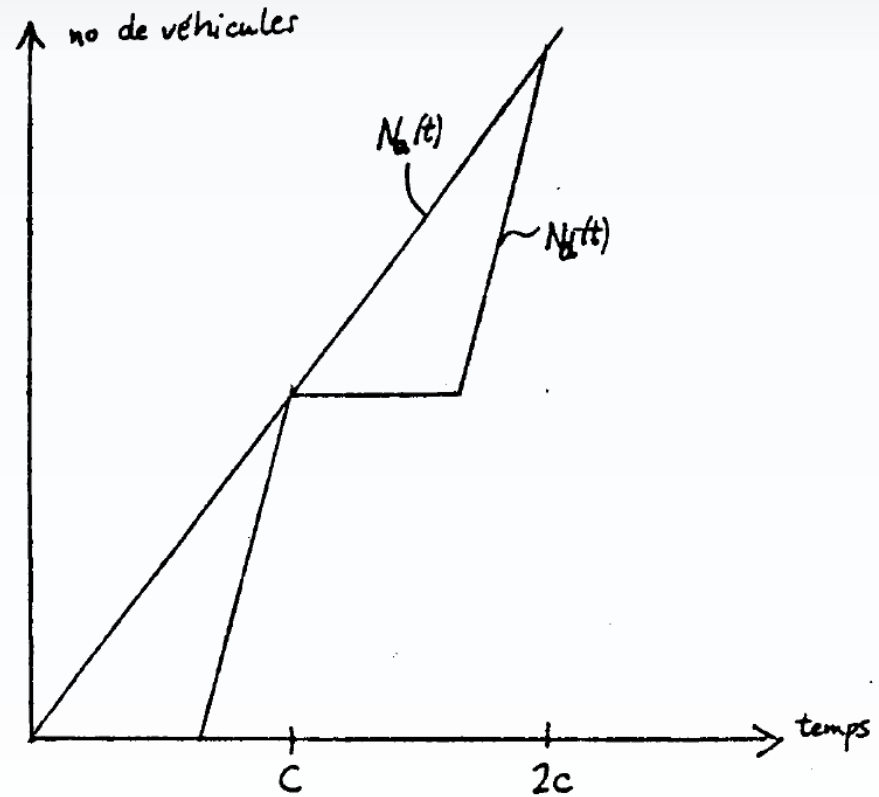
temps	no
8	1
16	2
24	3
32	4
40	5
48	6
56	7
64	8
72	9
80	10
88	11
96	12

$\Sigma: 438$   
 $\Sigma: 344$

Carrefour saturé avec arrivées uniformes ( $x_c = 1$ ):

$$x_c = \frac{q(t = nC)}{c(t = nC)} = 1$$

$$q(t = nC) = c(t = nC)$$



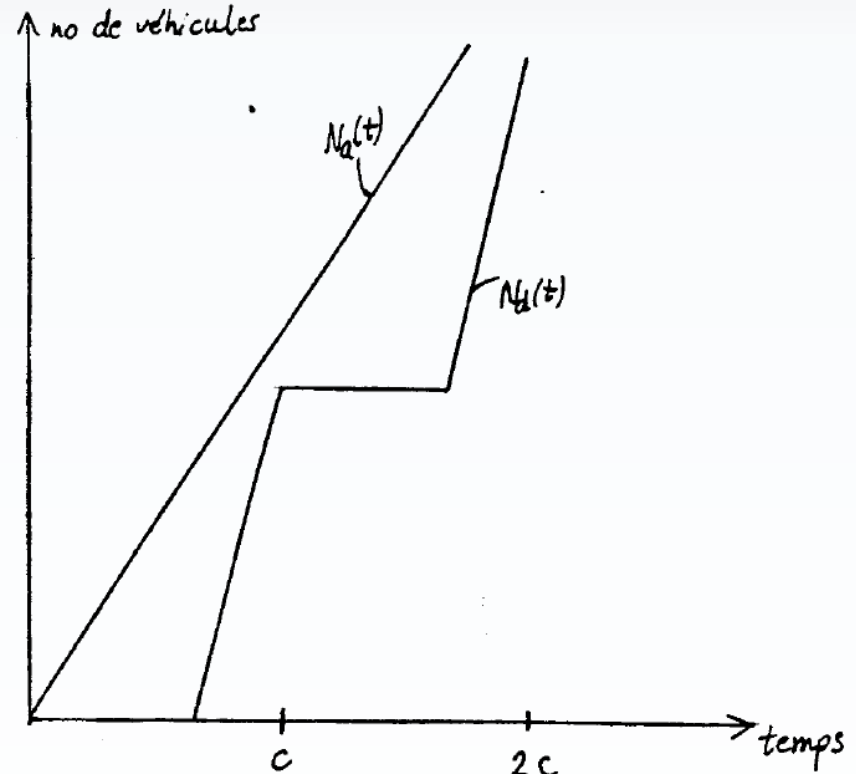
$$\int_{(n-1)C}^{nC} q(t) dt = \int_{(n-1)C}^{nC} c(t) dt$$

Carrefour sursaturé avec arrivées uniformes ( $x_c > 1$ ):

$$x_c = \frac{q(t = nC)}{c(t = nC)} > 1$$

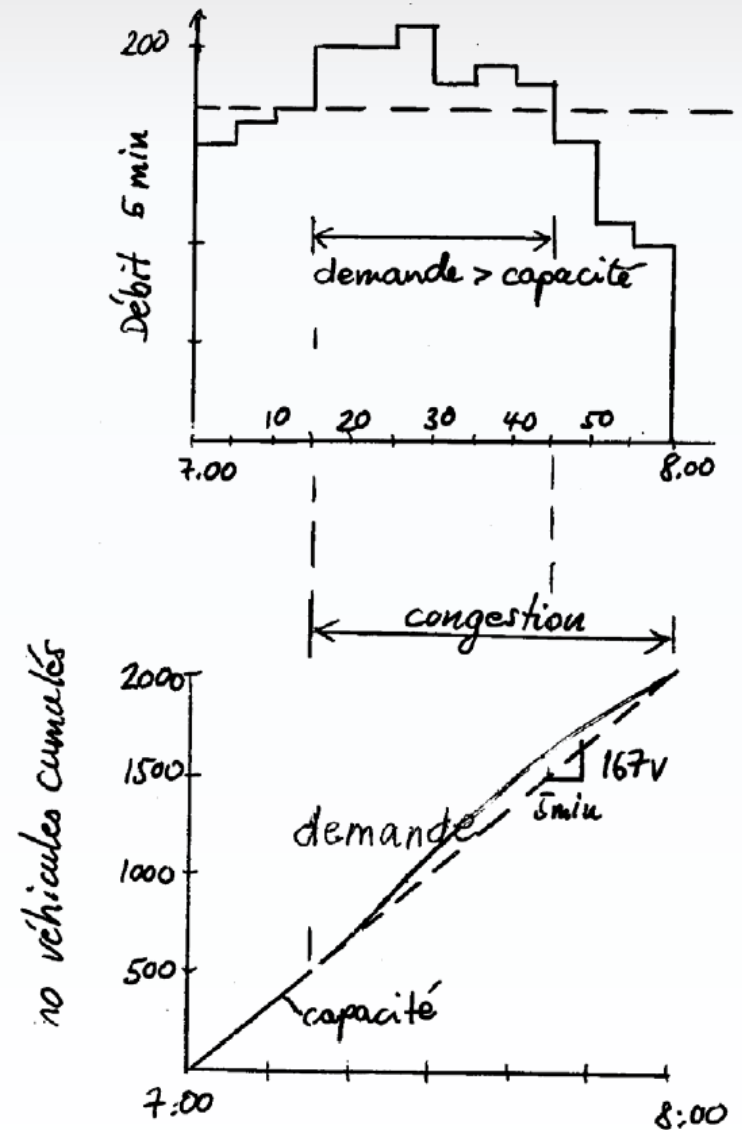
$$q(t = nC) > c(t = nC)$$

$$\int_{(n-1)C}^{nC} q(t) dt > \int_{(n-1)C}^{nC} c(t) dt$$

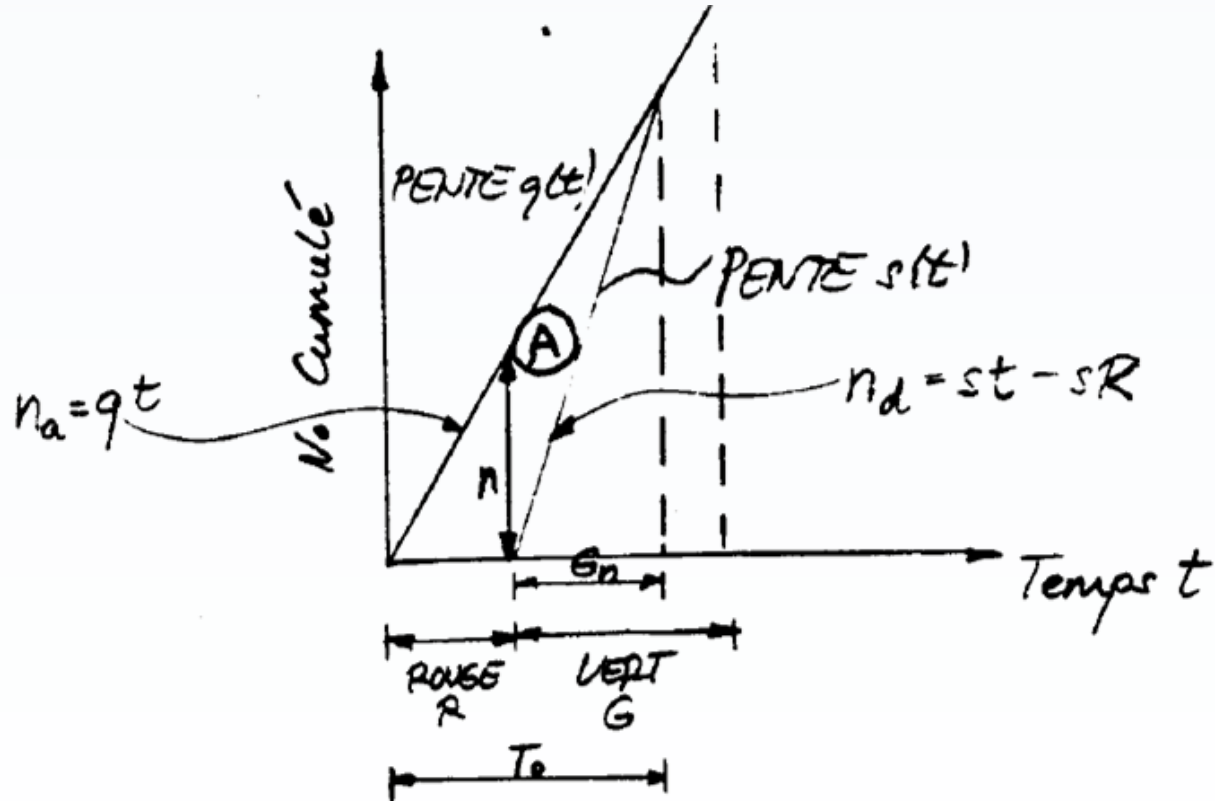


La sursaturation est d'habitude un phénomène périodique.

- Sinon la longueur de la file accroit à l'infini.
  - Demande locale maximal quand la file d'attente dépasse un autre carrefour.
- On observe que la demande à tendance à être influencée par les temps de parcours, qui sont eux-mêmes influencés par les retards.
- Phénomène heure de pointe



# CALCULS POUR DÉBITS UNIFORMES



Si  $x_c \leq 1$  :

La file maximale  $n$  :

$$n = qR$$

Temps de vert de dissipation  $G_n$  :

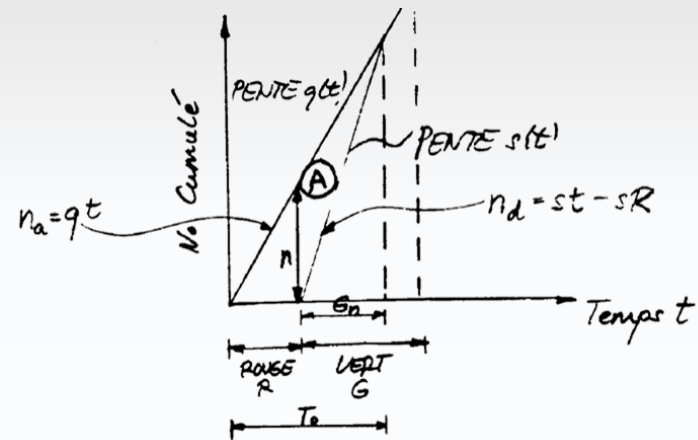
$$G_n = \frac{qR}{s - q}$$

Temps de dissipation de la file  $T_0$  :

$$T_0 = R + G_n = \frac{sR}{s - q}$$

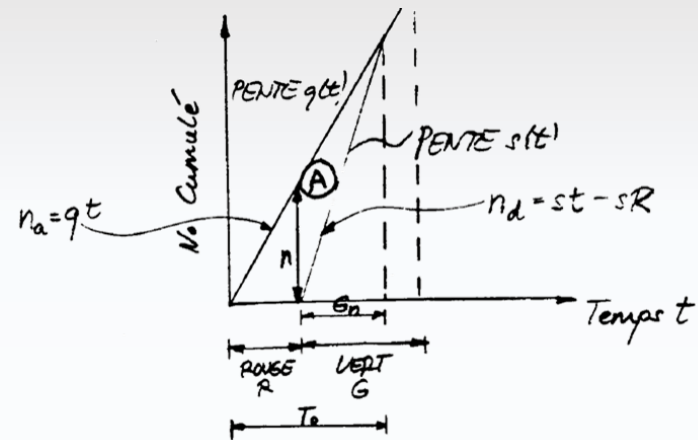
Retard total  $D$  :

$$D = \frac{qR^2}{2 \left(1 - \frac{q}{s}\right)}$$



Si  $x_c > 1$  :

Il faut ajuster la longueur de la file en itérant à travers les cycles.



- On remarque que les arrivés sont rarement uniforme longtemps lorsqu'on a saturation
  - On ne peut pas accommoder une file d'attente plus longue que le corridor d'approche (coupure au précédant carrefour)
  - Les usagers vont choisir des routes/moyens de transport alternes si les temps d'attente sont trop élevés

# EXEMPLE CALCUL DE RETARD

Feux de circulation avec :

- $C = 70s$
- $\frac{g}{c} = 50\%$
- $s = 1500 \text{ veh/h}$
- $q = 900 \text{ veh/h}$

Trouver le retard total du feux après 3 cycles.

C'est tout pour aujourd'hui!